17 Grundlagen der Matrizenrechnung

17.1 Grundbegriffe

1. Richtig: **b)** .
2. **a)** $m = n$; **b)** $m = 1$; **c)** $n = 1$.
3. Richtig: **c)**, **e)** .
4. Eine quadratische Matrix, bei der nur auf der Hauptdiagonalen von 0 verschiedene Elemente stehen.

17.2 Addition von Matrizen

1. Die Addition dieser Matrizen ist nicht definiert. Man kann nur Matrizen gleicher Ordnung addieren.

2. a) $A+B$ ist nicht definiert;

b) $A+C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A-C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $C-A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $B^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; c) nicht definiert.

4. Richtig: **a)** .

17.3 Skalares Produkt von Vektoren

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

2. a) $N = A_{St} + A_{pH} + A_1 + A_2 + A_3 = (22, 19, 16)$;

b) $P_1 = (22, 3, 2)\begin{pmatrix} +5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 110 - 12 - 12 = 86$;

$P_2 = (3, 19, 1)\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = -15 + 76 - 6 = 55$;

$P_3 = (4, 2, 16)\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -20 - 8 + 96 = 68$.

17.4 Multiplikation von Matrizen

1. Richtig: **c)** .

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 12 & 14 \\ 13 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

b) Die Multiplikation zweier Matrizen ist definitionsgemäß nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. BA ist also nicht definiert.

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$; **b)** nicht definiert; **c)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A_{7,8}\, B_{8,11} = C_{7,11}$; $n = 7$; $m = 11$.

6. $(40, 50, 10) \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (44, 42, 14)$

KS: 44% ; RK: 42% ; NSB: 14% .

7. a) $n = r$ und $m = 1$; **b)** $n = r$ und $m = 1$ und $s = 1$;
c) $n = r$ und $s = 1$; **d)** $n = r$ und $m = s$; **e)** $n \neq r$.

8. Richtig: **B)** .

9. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 26 \\ 14 \end{pmatrix}$;

b) $(3, 3, 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (14, 5, 17, 18)$.

10. a) Die Übergangsmatrix wird im folgenden mit A bezeichnet:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}85 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}05 \\ 0{,}40 & 0{,}40 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{pmatrix};$$

b) Bezeichnet man den Zeilenvektor der Wahlergebnisse von 2002 mit b und den Zeilenvektor der Wahlergebnisse von 2006 mit x, so gilt $x = bA$. Daraus folgt $x = (46{,}1\,;\, 41{,}595\,;\, 6{,}27\,;\, 4{,}735)$.

18.2 Lösung Linearer Gleichungssysteme

1. (1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ (4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$x = 3, \quad y = 1, \quad z = -1\,.$

2. (1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$ (4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 4\,.$

3. x_1: Menge Zellstoff; x_2: Menge Leim; x_3: Menge A; x_4: Menge B

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$
$$x_1 = 5x_2; \quad x_3 = x_4; \quad 2x_2 = x_3$$
$$x_1 = 50; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = x_4 = 20\ .$$

4. x: Menge an D.; y: Menge an C.; z: Menge an K.

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{3}{8}z = 7$$
$$x + y + z = 17$$
$$\tfrac{3}{4}y + \tfrac{5}{8}z = 5 \qquad x = 10; \quad y = 5; \quad z = 2\ .$$

5. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 & 9 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1\ .$$

6. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -11 \\ 2 & -1 & 7 & 20 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & -3 & 15 & 42 \\ 0 & -2 & 10 & 28 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mehrdeutige Lösung: $z =$ beliebig und $x = -z + 3$; $y = 5z - 14$.

7. **a)** $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right)$$

$$-9z = -18 \Rightarrow z = 2$$
$$4y - 6 = -2 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1$$
$$2x + 1 + 10 = 7 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2\ .$$

b) nicht lösbar, da Widerspruch zwischen 1. und 3. Gleichung.

8. $$\begin{array}{ll} P + C + B + R & = 120 \\ 1{,}5P & = R \\ B + C & = R - P \\ B & = 3C \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 360 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 120 \end{array}\right)$$

Das Gleichungsystem ist eindeutig lösbar. Sukzessiv erhält man die Lösung: $R = 60$; $B = 15$; $C = 5$; $P = 40$.